

# Wachstum von Aktienkursen

## am Beispiel des Dow Jones Industrial Index (DJI)

### Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	1
2. Der DJI mit exponentiellem Wachstum als Mittelwertkurve .....	2
2.1 Darstellung der Mittelwertkurve 1935 bis 1995 .....	2
2.2 DJI im Verhältnis zur Mittelwertkurve .....	3
2.3 Simulierung der Wellenfunktion.....	3
2.4 Verhältniskurve bezogen auf die Langwelle .....	4
2.5 Simulierung der „Torbogen“ .....	4
2.6 Endergebnis im Gesamtchart.....	5
2.7 Kritik dieser Anpassung .....	6
3. Die Mittelwertkurve abhängig vom Wachstum der Weltbevölkerung statt der Zeit .....	7
3.1 Darstellung der Mittelwertkurve.....	7
3.2 Kombination mit den Wellen .....	7
3.3 Kritik an dieser Darstellung .....	8
4. Die Lösung: Abhängigkeit des DJI von Zeit und Bevölkerungswachstum .....	10
4.1 Simulation der komplexen Abhängigkeit .....	10
4.2 Kombination mit den Wellen .....	10
4.3 Kritik dieser Darstellung .....	11
5. Schluss, Literatur, Links.....	14

## 1. Einleitung

Was treibt den langfristigen Aktienkurs? Es ist üblich, das Wachstum von Kapitalanlagen mit dem Wachstum von verzinstem Kapital zu vergleichen wie zum Beispiel auf dem Sparbuch. Wenn man eine bestimmte Summe  $K_0$  zum Zeitpunkt  $t=0$  mit jährlich konstantem Zinssatz anlegt und dieses Kapital nebst Zinsen mehrere Jahre  $t=t_n$  auf dem Konto belässt, dann und nur dann wächst dieses Kapital zeitlich exponentiell. Trägt man in einem Diagramm  $K$  über der Zeitachse  $t$  auf, dann ergibt sich eine nach oben gekrümmte Kurve. Um diese Kurve besser analysieren zu können, sucht man eine Darstellung, in der diese Kurve eine Gerade wird. Dazu muss die Kapitalachse nach oben hin immer kürzere Einheiten erhalten: zum Beispiel sind die Abstände der Verdopplungen (1, 2, 4, 8, 16, etc) auf dieser Achse immer gleich lang. Dadurch erhält man die Umkehrung der Exponentialfunktion, den Logarithmus. Auf der logarithmischen Achse werden nur exponentiell wachsende Kapitalanlagen und NUR DIESE zu einer Geraden. Die Zeitachse bleibt linear. Nun ist es üblich geworden, auch Aktienkurse oder Aktienindizes in einem solchen Diagramm einzutragen, um im Vergleich mit einer Geraden herauszufinden, ob diese Werte exponentiell steigen, also ob sie jährlich um den gleichen Prozentsatz steigen. Es gibt einige Ausnahmewerte, die langfristig einen solchen Verlauf annähernd nehmen, wenn man die kurzfristigen Schwankungen großzügig übersieht. Man könnte sie Wachstumswerte nennen. Die meisten anderen Werte folgen diesem Gesetz aber nicht. Der Vorteil der logarithmischen Darstellung liegt aber darin, dass auf dieser Achse die jährliche prozentuale Steigerung immer den gleichen Abstand aufweist. Außerdem kann man auf einen Blick sehen, welche Aktien NICHT exponentiell wachsen, sondern - wenn überhaupt - andern Gesetzen folgen. So gibt es eine Gruppe von Werten, deren Wachstum direkt mit dem Wachstum der Weltbevölkerung zu tun hat, wie zum Beispiel

Aktiengesellschaften aus der Nahrungsmittel-, Pharma- oder Getränke-Branche. Da die Weltbevölkerung nicht exponentiell wächst, sondern begrenzt-hyperbolisch, sollten diese Werte eher einem solchen Gesetz folgen. Andererseits ist in den Kursen auch ein zeitlicher Faktor enthalten, zumindest der der Inflation.

Im Jahre 2002 wollte ich den langfristigen mittleren Verlauf des DJI mathematisch nachvollziehen, wobei ich auch die Abhängigkeit von der Weltbevölkerung dargestellt hatte. Ein Freund bestand aber auf dem exponentiellen Ansatz zumindest für die Mittelwertkurve. Den letzteren Weg habe ich dann zunächst weiterverfolgt, wobei mir für die Zeit von 1935 bis 1995 eine zeitabhängige Wellenfunktion auffiel, in der die Werte um den Mittelwert herum schwankten. Über der Langwelle waren noch kürzere Schwankungen zu erkennen von anderer, eher torbogenförmiger Struktur.

Inzwischen bin ich mir aber nicht mehr so sicher, ob nicht doch auch die Abhängigkeit vom Wachstum der Weltbevölkerung eine – zusätzliche – Rolle spielen könnte. So habe ich nun beide Wege weiterverfolgt, wobei die Unterscheidung besonders wichtig ist, wenn man sehr, sehr langfristige Verläufe darstellen oder gar extrapolieren möchte. Ich werde in den folgenden Kapiteln beide Methoden zeigen. Dabei erweist sich überraschend einer der beiden Wege als besser geeignet für eine Anpassung der Werte über sogar 108 statt nur 60 Jahre.

## 2. Der DJI mit exponentiellem Wachstum als Mittelwertkurve

### 2.1 Darstellung der Mittelwertkurve 1935 bis 1995

Wir bezeichnen den zeitlichen Mittelwert des DJI mit  $A$ . Um ihn berechnen zu können, nehmen wir in diesem Kapitel das sogenannte exponentielle Wachstum an.

Das exponentielle Wachstum wird durch den Ansatz

$dA/dt = k_t \cdot A^{p_t}$  mit  $p_t = 1$  dargestellt. Bei numerischer Integration lautet die Lösung

$A = \text{Integral}(k_t \cdot A^{p_t} \cdot dt)$ . Diese Form verwenden wir in Kapitel 4.

Integriert lautet der Ansatz mit  $p_t = 1$ :  $\text{Integral}(dA/A) = \text{Integral}(k \cdot dt)$  mit der Lösung:

$$\text{LN}(A/A_0) = k_t \cdot (t-t_0)$$

$\text{LN}(A)$  über  $t$  aufgetragen ergibt eine Gerade.

Wenn man beide Seiten als Exponent zur Basis  $e$  schreibt, wird die Formel delogarithmiert, und man erhält für den Fall  $p_t = 1$  die Exponentialfunktion:

$$A/A_0 = \text{EXP}(k_t \cdot (t-t_0)) \text{ oder}$$

$$A = A_0 \cdot \text{EXP}(k_t \cdot (t-t_0)).$$

$A_0$  ist hier der Anfangswert der Mittelwertkurve zu der Zeit  $t_0$ .

$k_t$  ist der zu bestimmende Wachstumsfaktor.

Diese beiden Parameter sind durch Kurvenanpassung zu bestimmen. Wir definieren eine Zielfunktion, indem wir die berechnete Mittelwertkurve mit dem DJI vergleichen und die Differenz zum Quadrat erheben. Durch Summation aller Fehlerquadrate erhalten wir ein Maß für die Güte der Annäherung der Mittelwertkurve an den wahren Verlauf des DJI. Die Quadratur sorgt dafür, dass positive wie negative Differenzen gleichwertig positiv sind, so dass im Endergebnis alle Punkte von den echten Werten im ausgewogenen Mittelpunkt liegen.

## 2.2 DJI im Verhältnis zur Mittelwertkurve

Um die Abweichungen besser untersuchen zu können, definieren wir eine neue Funktion  $V$ , die wir über der Zeit  $t$  auftragen:

$$V(t) = DJI/A.$$

Siehe folgendes Diagramm auf Seite 4. Wir erkennen, dass diese Werte von  $V$  ungefähr wie eine Sinus-Funktion aussehen.

## 2.3 Simulierung der Wellenfunktion

Wir können durch diesen schwingenden Punkthaufen eine Mittelwertkurve legen. Zunächst fällt auf, dass  $V(t)$  um den Mittelwert 1 herum schwingt. Der erste Ansatz ist deshalb  
 $V_m = 1.$

Eine Sinuskurve schwingt von Null auf 1, dann auf Null und weiter auf Minus 1 und zurück auf 0. Wir multiplizieren diese Funktion mit einer Amplitude, die kleiner ist als 1.

Der Ansatz lautet nun

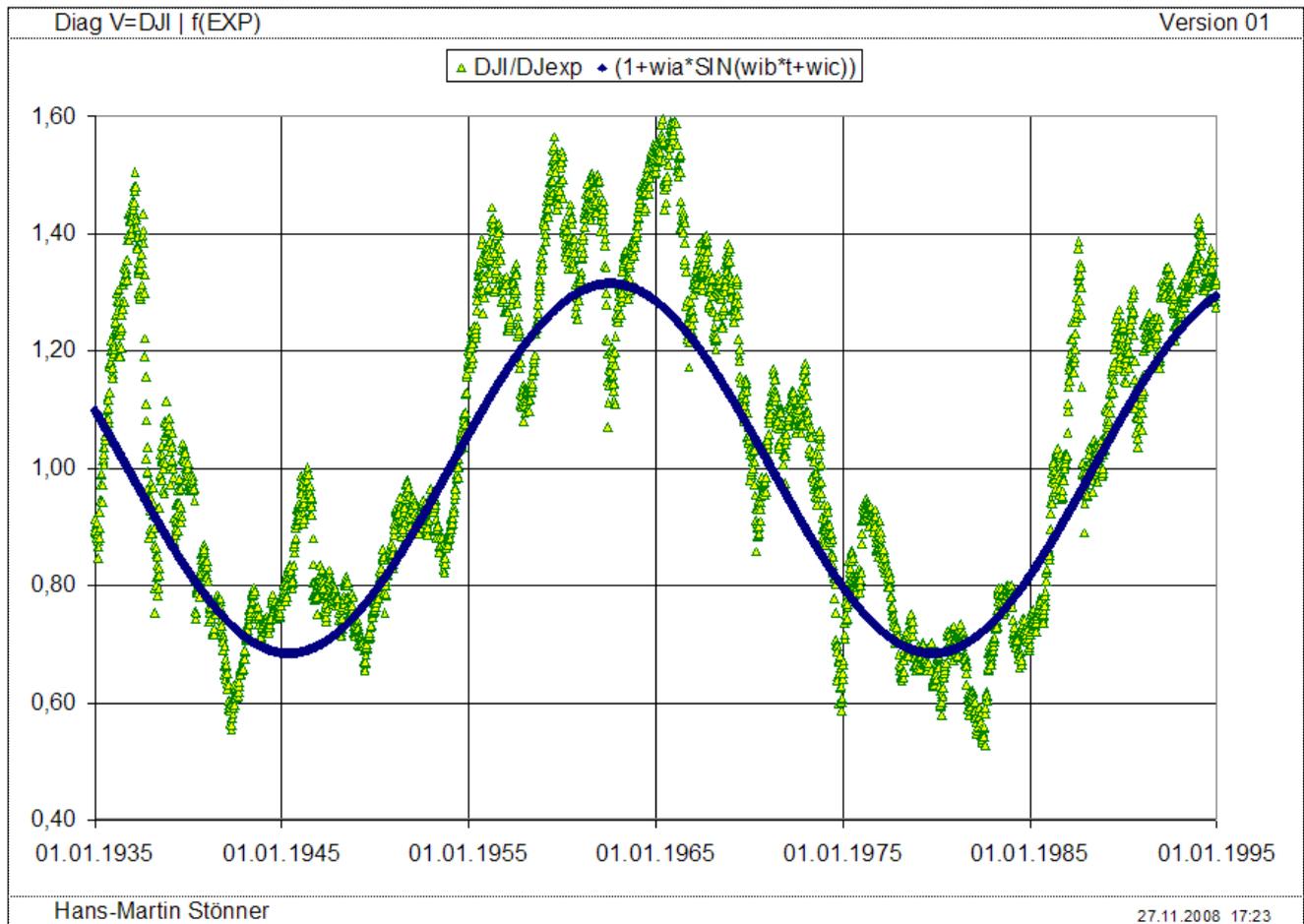
$$V_m = (1 + a \cdot \text{SIN}(b \cdot t + c)).$$

Darin sind

$a$  = Amplitude

$b = 2 \cdot \text{Pi} / \text{Schwingungsdauer}.$

Und  $c$  ist ein Verschiebungsparameter, um die berechnete Sinuskurve nach links oder rechts zu verschieben, damit die Sinuskurve gut mit der tatsächlichen Schwingung übereinstimmt. Die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden wieder durch Minimierung einer Zielfunktion bestimmt. Man kann die Startwerte für  $a$  und  $b$  sehr gut abschätzen. Für  $c$  nimmt man einen beliebigen Startwert, z. B. Null an.



Wie man sieht, ergibt sich für die Zeit 1935 bis 1995 eine sehr gute Anpassung. Die Sinuskurve wird durch kürzere, Torbogen ähnlichen, Abweichungen überlagert.

## 2.4 Verhältniskurve bezogen auf die Langwelle

Um auch die *kurzen* Schwingungen erkennbar zu machen, bilden wir erneut ein Verhältnis, diesmal  $V_{\text{kurz}}$  oder  $V_k$ :

$$V_k = V/V_m.$$

Mehrere dieser kurzen Schwingungen sehen nicht wie Sinuskurven aus, sondern wie halbe Sinuskurven, die wie Torbogen nebeneinander gestellt sind.

## 2.5 Simulierung der „Torbogen“

Diese Schwingungen pendeln auch um den Mittelwert 1.

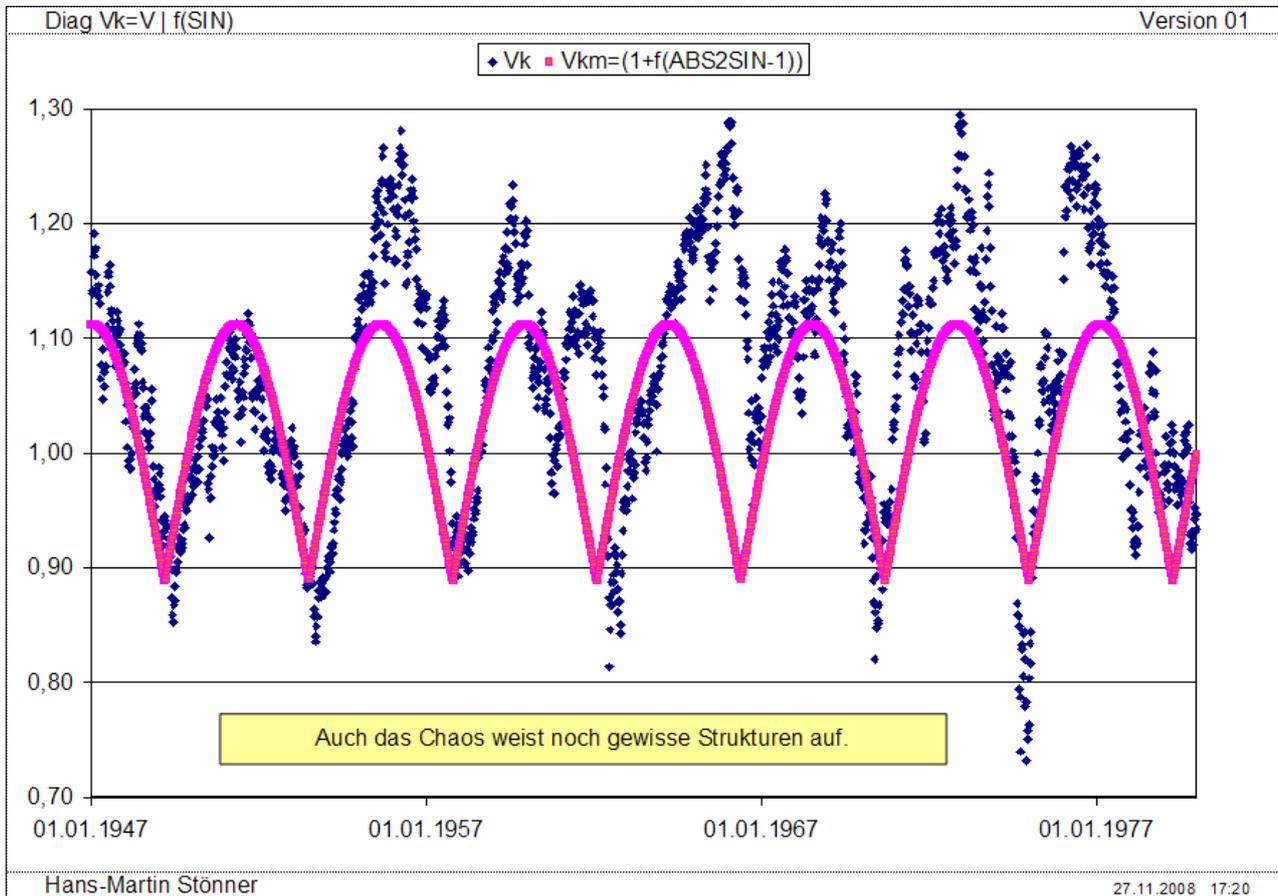
$$V_{km} = 1.$$

Um die Sinuskurve verwenden zu können, klappen wir die negativen Bögen nach oben, indem wir die ABS-Funktion nutzen. Dann haben wir schon die gewünschte Form:

$$aa * \text{ABS}(\text{SIN}(bb * t + cc)).$$

Jetzt müssen wir noch dafür sorgen, dass auch diese Funktion zwischen plus 1 und minus 1 pendelt. In obiger Form pendelt sie zwischen Null und plus 1. Wir müssen sie also verdoppeln und dann vom Ergebnis 1 wieder abziehen. Jetzt pendelt die Funktion wie gewünscht zwischen +1 und -1:

$$V_{km} = (1 + aa * (ABS(2 * SIN(bb * t + cc)) - 1))$$



aa ist eine Amplitude, die kleiner ist als 1.

bb ist diesmal  $1 * \pi / \text{kurze Schwingungsdauer}$ .

cc is wieder ein Verschiebungsparameter.

Die Parameter werden wieder über die Zielfunktion „Minimierung der Fehlerquadratsumme“ bestimmt.

## 2.6 Endergebnis im Gesamtchart

Setzt man alle Verhältnisse ein, so erhält man

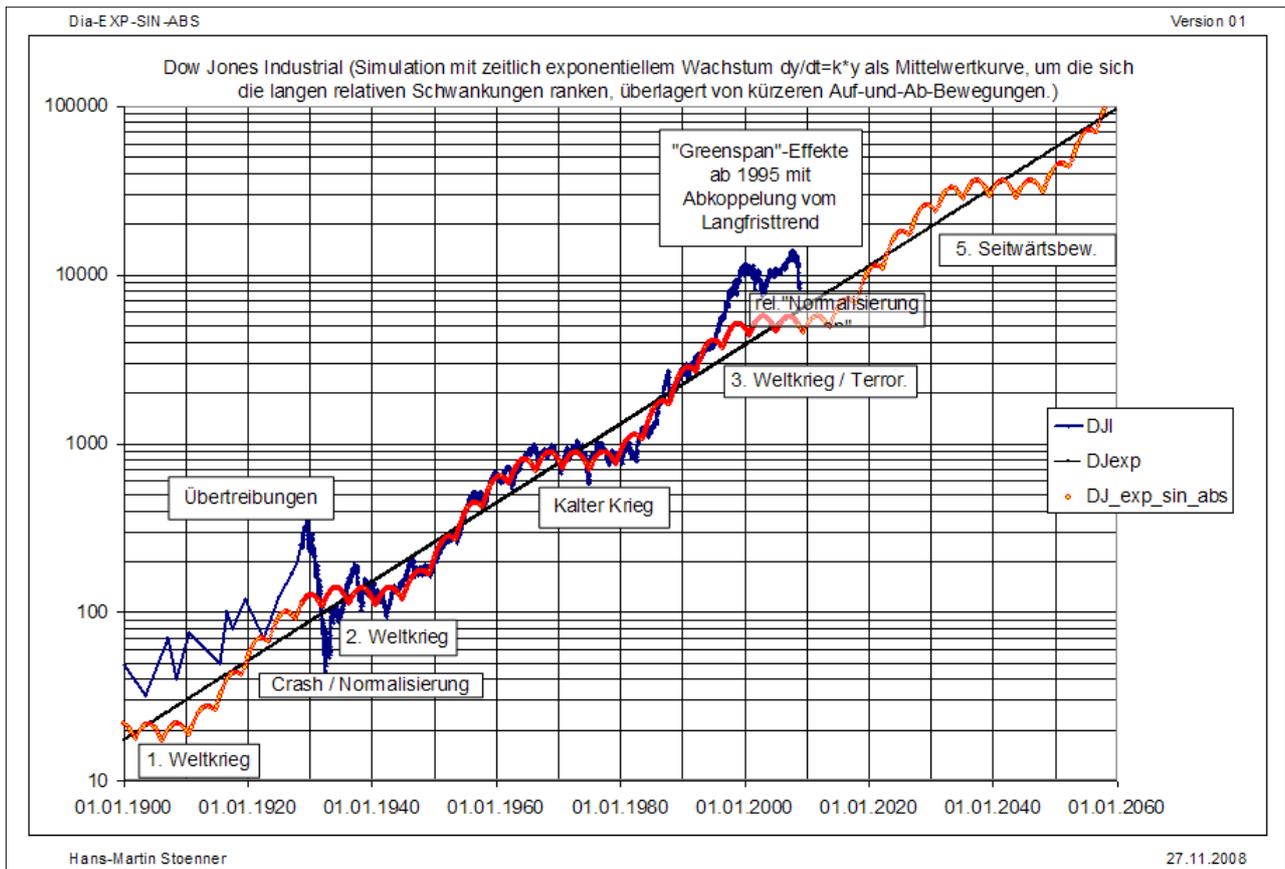
$$A = DJI_{\text{berechnet}} = A_m * V_m * V_{km}$$

oder

$$A = (A_o * \text{EXP}(k_t * (t - t_o))) * (1 + a * \text{SIN}(b * t + c)) * (1 + aa * (ABS(2 * \text{SIN}(bb * t + cc)) - 1))$$

Obwohl alle Parameter schon bekannt sind, kann man nochmals eine simultane Feinabstimmung aller Parameter vornehmen.

Das Ergebnis dieser Funktion sehen wir in diesem Diagramm:



## 2.7 Kritik dieser Anpassung

Die exponentielle Anpassung stimmt im Bereich 1935 bis 1995 relativ gut mit den gegebenen Werten überein. Die Rückwärts-Extrapolation bis 1900 weist gegenüber dem tatsächlichen Verlauf Abweichungen nach unten auf. Die Vorwärts-Extrapolation führt 2060 auf einen eher unwahrscheinlich hohen DJI von etwa 100 000.

Ferner erscheinen die Abwärtsschwingungen bei der gleichbleibenden Steigung der exponentiellen Mittelwertkurve eher stets als Seitwärtsbewegungen von jeweils etwa 15 Jahren Dauer.

Die Wellenform wird jedoch recht gut wiedergegeben, sowohl bei den Langwellen mit einer Schwingungsdauer von etwa 37 Jahren als auch bei den kurzen Wellen von etwa 4 Jahren Dauer.

Die Extrapolation in die Zukunft führt auf ziemlich extreme Werte. Dies ist angesichts der ständigen **Abnahme** des Weltbevölkerungszuwachses und der allmählichen Annäherung an die maximale Weltbevölkerungszahl eher unwahrscheinlich. Deshalb suchen wir im nächsten Kapitel nach einem anderen Einfluss.

### 3. Die Mittelwertkurve abhängig vom Wachstum der Weltbevölkerung statt der Zeit

#### 3.1 Darstellung der Mittelwertkurve

Der jeweilige Mittelwert des DJI sei  $A$ .  $A$  wird in Abhängigkeit vom Wachstum der Weltbevölkerung (anstelle der Zeit) gesucht:

$$dA = k_w \cdot A^{p_w} \cdot dw.$$

Die Parameter  $k_w$  und  $p_w$  sind unbekannt und müssen ermittelt werden.

Der Zusammenhang der Zeit mit dem Wachstum der Weltbevölkerung  $w$  lautet:

$$dw = dt \cdot (k \cdot (w_a + w) \cdot (1 - w/w_{\max}))^3$$

Die Parameter  $k$ ,  $w_a$ ,  $w_{\max}$  sind bereits bekannt: siehe [1] (wobei  $k=k$ ,  $w_a=a$ ,  $w_{\max}=m$ )

Durch numerische Integration werden die Zeitachse  $t$ , die Weltbevölkerungsachse  $w$ , der DJI und  $A$  in Spalten nebeneinander dargestellt.

Die Zielfunktion ist die Minimierung der Fehlerquadratsumme aller  $(DJI-A)^2$ . Die Parameter  $k_w$  und  $p_w$  werden so bestimmt, dass die Zielfunktion erfüllt wird.

#### 3.2 Kombination mit den Wellen

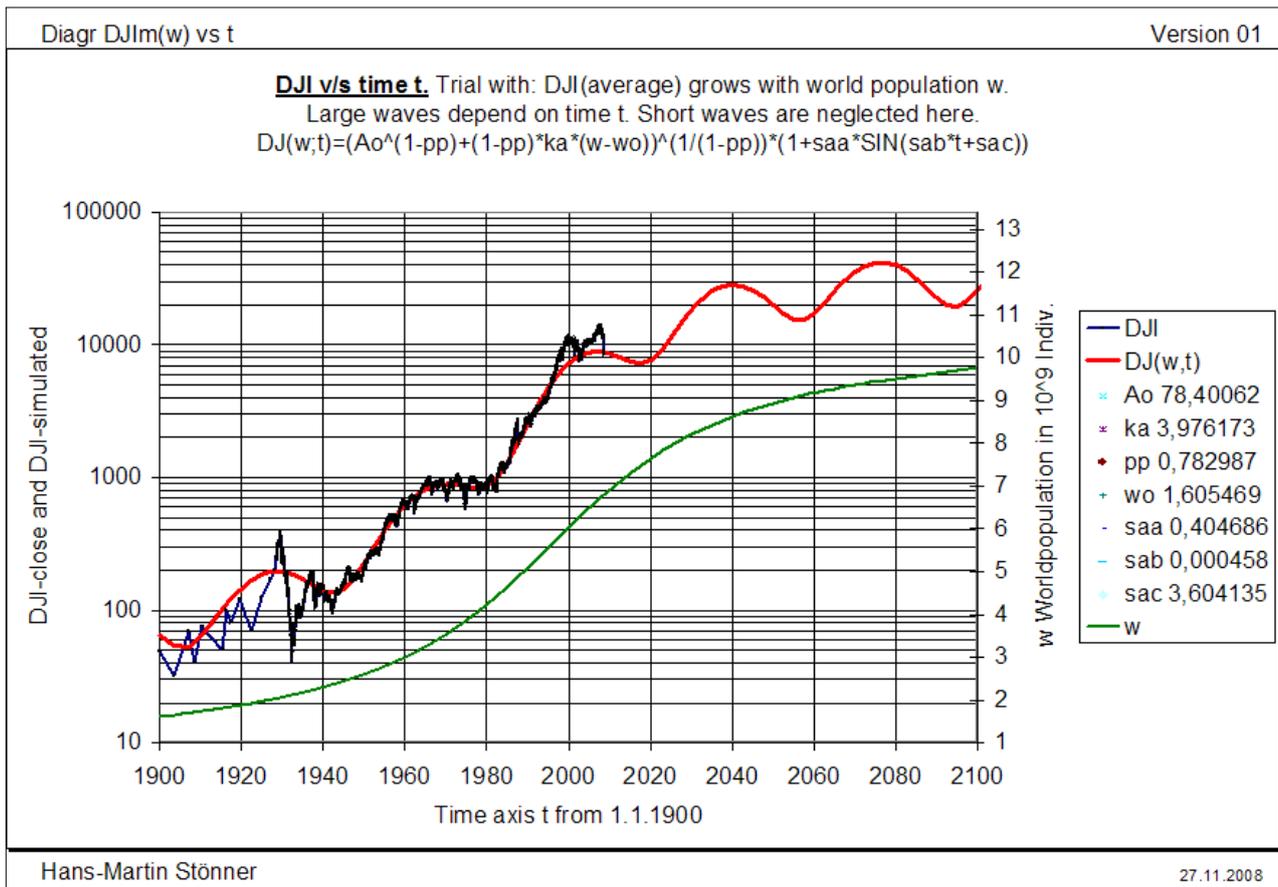
Analog zu Kapitel 2 werden die beiden Wellenfunktionen mit den Ergebnissen multipliziert:

$$AWW = \text{Integral}(k_w \cdot A^{p_w} \cdot dw) \cdot (1 + a \cdot \text{SIN}(b \cdot t + c)) \cdot (1 + aa \cdot (\text{ABS}(2 \cdot \text{SIN}(bb \cdot t + cc)) - 1))$$

Zielfunktion =  $\text{Summe}(AWW - \text{DJI})^2 \rightarrow \text{Minimum!}$

Dabei werden alle Parameter noch einmal simultan variiert, um eine möglichst gute Gesamtanpassung zu erhalten. In folgendem Diagramm sind die kleinen Wellen weggelassen, um die Darstellung etwas klarer zu machen. Außerdem ist das Integral gelöst, um die numerische Integration weitgehend zu vermeiden.

**Hinweis:** In den folgenden Diagrammen werden anstelle der Parameter  $k_w$  und  $p_w$  häufig die Bezeichnungen  $k_a$  und  $p_p$  benutzt. (Dies hat lediglich historische Gründe.)



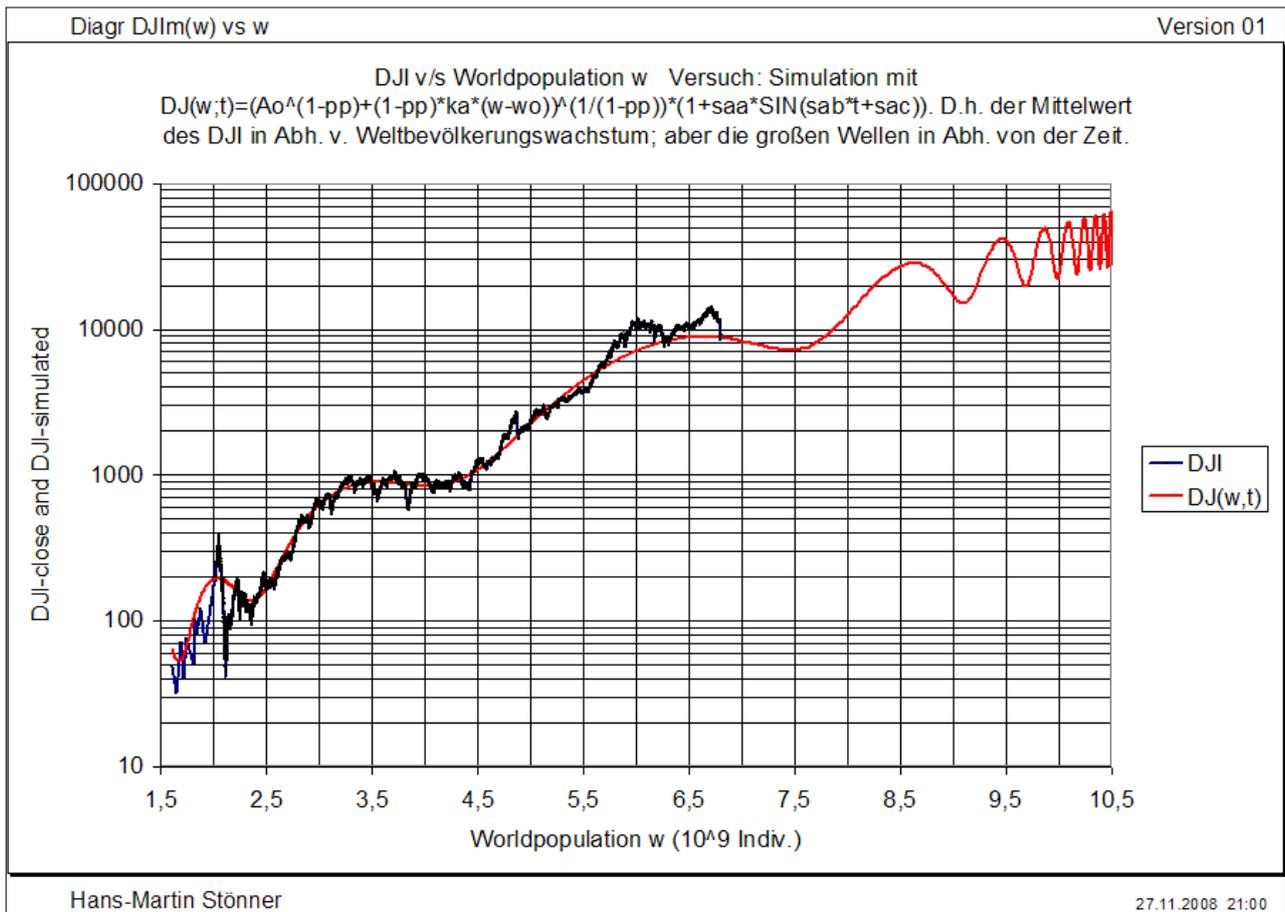
### 3.3 Kritik an dieser Darstellung

Die Anpassung der Kurve an die Werte von 1900 bis 2008 ist besser als bei der exponentiellen Zeitabhängigkeit der Mittelwertkurve in Kapitel 2.

Diese alleinige Abhängigkeit vom Wachstum der Weltbevölkerung führt aber bei Extrapolation bis zum Sättigungswert des Bestandes der Weltbevölkerung  $w_{max}$  zu einer Schwingungskurve, deren Mittelwert am Ende nicht mehr mit der Zeit wächst.

Dies wird sichtbar, wenn man die Extrapolation nicht über einer Zeitachse sondern über der Weltbevölkerung als x-Achse darstellt, wie auf folgendem Bild zu sehen ist.

Die Aktienwerte würden dann nur noch in zeitlichen Wellen schwanken, aber nicht mehr langfristig steigen. Dies ist bei vorherrschender Inflationsrate aber **unwahrscheinlich**.



Es widerspricht wie gesagt der Erfahrung, dass die Kurse nicht mehr wachsen, wenn die Weltbevölkerung an ihre Grenze kommt, denn es muss auch dann noch ein zeitliches „Wachstum“ geben, welches mindestens die zeitliche Inflation kompensiert.

Deshalb suchen wir im nächsten Kapitel 4 nach einer Formel, die beide Einflüsse berücksichtigt, nämlich sowohl die Zeit als auch das Weltbevölkerungswachstum.

## 4. Die Lösung: Abhängigkeit des DJI von Zeit und Bevölkerungswachstum

### 4.1 Simulation der komplexen Abhängigkeit

Wir erweitern dazu die Formel aus dem vorigen Kapitel 3 um eine Zeitabhängigkeit der Mittelwertkurve wie in Kapitel 2.

$$dA = k_w \cdot A^{p_w} \cdot dw + k_t \cdot A^{p_t} \cdot dt$$

Dieser Ansatz lässt sich nur numerisch integrieren.

### 4.2 Kombination mit den Wellen

Damit erhalten wir wie in Kapitel 3

$$AWW = \text{Integral} (k_w \cdot A^{p_w} \cdot dw + k_t \cdot A^{p_t} \cdot dt) \cdot (1 + a \cdot \text{SIN}(b \cdot t + c)) \cdot (1 + aa \cdot (\text{ABS}(2 \cdot \text{SIN}(bb \cdot t + cc)) - 1))$$

Wir setzen für  $p_t$  ein oberes Limit von 1, um hyperbolisches zeitliches Wachstum zu vermeiden. Alle Parameter werden neu bestimmt für alle Messwerte von 1900 bis 2008 ähnlich wie in Kapitel 2.

Die zeitlich-exponentiellen Steigerungsanteile wurden durch eine Variation des Parameters  $k_t$  entsprechend 1%, 2%, 3% und 4% pro Jahr vorgegeben, wobei die Differenz zur effektiven Steigerung jeweils als abhängig vom Weltbevölkerungswachstum angepasst wurde. Dabei ergaben sich diese Parameter.

kt	0,00995	kt	0,0198	kt	0,0296	kt	0,0392
pt	1	pt	1	pt	1	pt	1
Ao	64,38	Ao	55,275	Ao	46,863	Ao	38,192
ka	2,564	ka	1,2598	ka	0,402	ka	0,0398
pp	0,8125	pp	0,8775	pp	0,9907	pp	1,2392
wo	1,6055	wo	1,6055	wo	1,6055	wo	1,6055
saa	0,3963	saa	0,3939	saa	0,3912	saa	0,3903
sab	0,0005	sab	0,0005	sab	0,0005	sab	0,0005
sac	3,4488	sac	3,353	sac	3,2305	sac	3,0817
asa	0,0795	asa	0,0819	asa	0,0865	asa	0,093
asb	0,002	asb	0,002	asb	0,002	asb	0,002
asc	2,5067	asc	2,4946	asc	2,4767	asc	2,4661
rpa=	1%	rpa=	2%	rpa=	3%	rpa=	4%
FQS=	121,85	FQS=	126,02	FQS=	131,59	FQS=	140,43

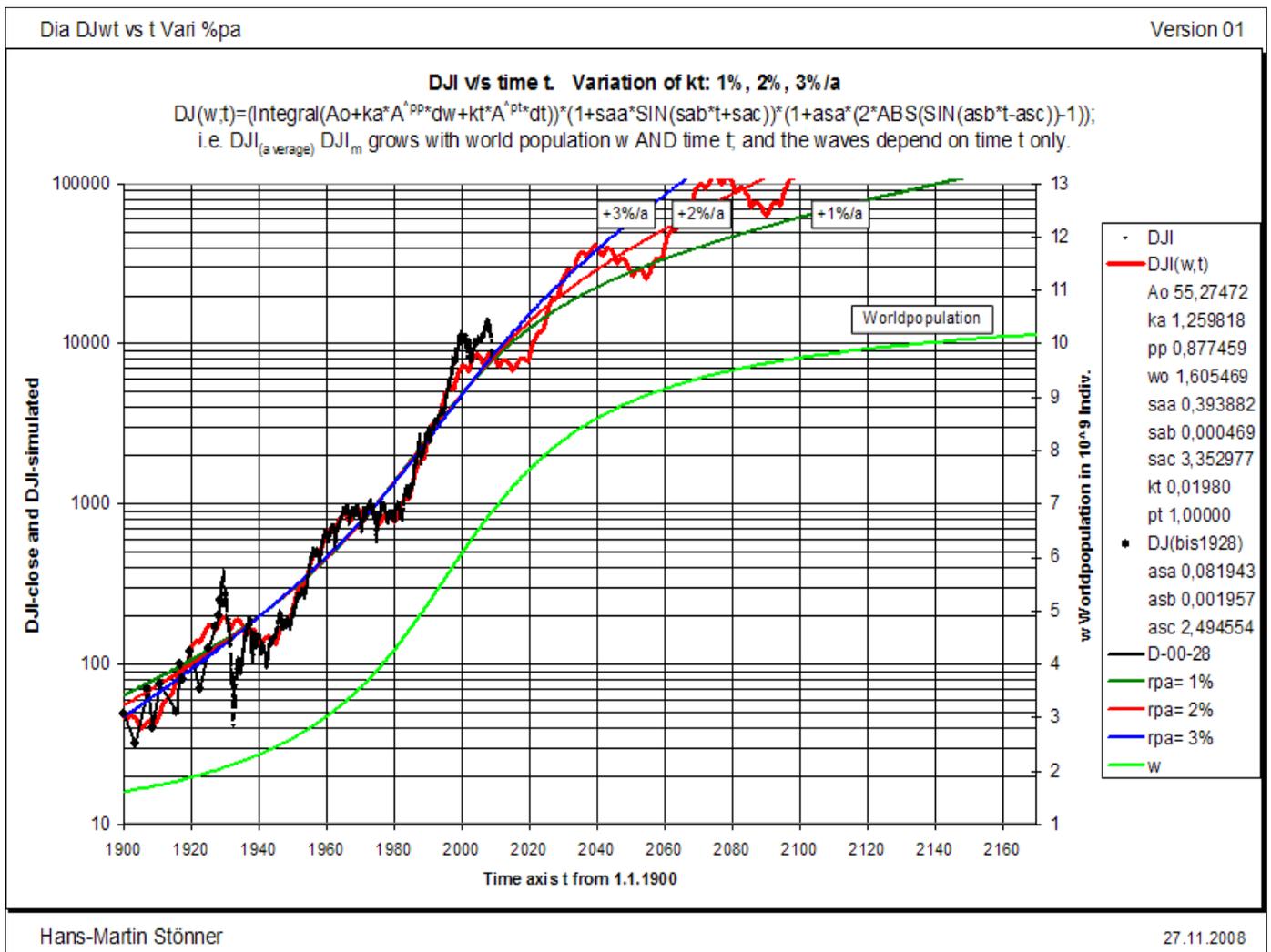
$k_t$  ergibt sich aus dem Zusammenhang  $rpa = (\exp(k_t) - 1)$  in Prozent ausgedrückt.

Daraus folgt:

$$k_t = \text{LN}(rpa + 1).$$

**Hinweis:** In der obigen Tabelle werden anstelle der Parameter  $k_w$  und  $p_w$  die Bezeichnungen  $ka$  und  $pp$  benutzt. (Dies hat lediglich historische Gründe.)

In der folgenden Darstellung werden die ersten drei Fälle gezeigt, wobei die Wellen nur für die mittlere Kurve (+2%/a), bei den andern Kurven nur die Mittelwertkurven gewählt wurden. Zum Vergleich ist die Weltbevölkerungskurve „Worldpopulation“ eingezeichnet.



### 4.3 Kritik dieser Darstellung

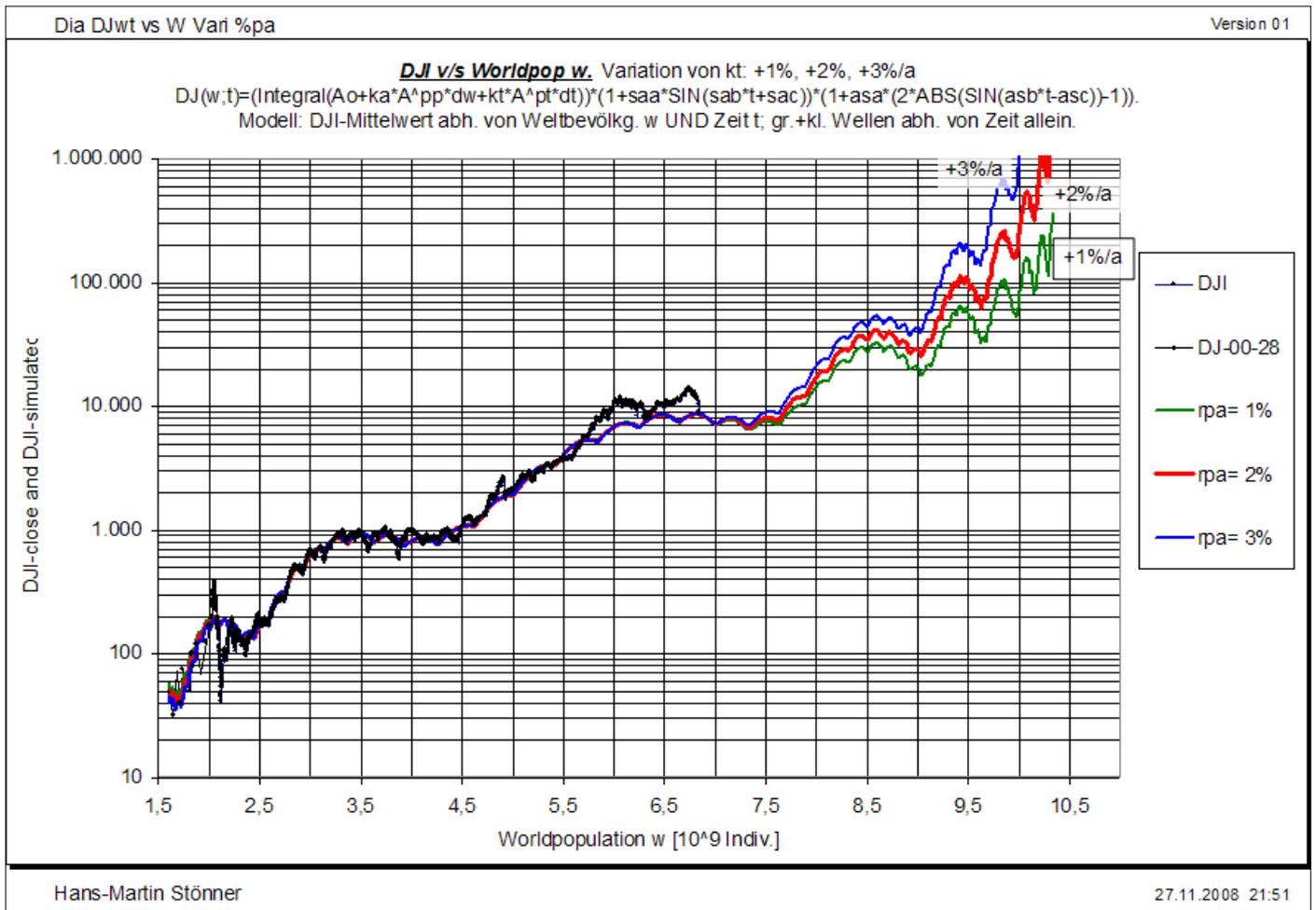
Das Ergebnis kann sich sehen lassen, was die Anpassung an die Werte von 1900 bis 2008 anbetrifft. Die Ausnahmesituationen um 1929 herum als auch die Übertreibungen von 1995 bis 2008 sind sehr schön als Abweichung vom übrigen normalen Verlauf zu erkennen. Besonders gut ist die einzig echte Seitwärtsbewegung von 1965 bis 1980 erfasst, wobei auch die kurzweiligen „Torbogenverläufe“ sehr schön zu sehen sind.

Allgemein kann man sagen: Bei geringerem Zuwachs pro Jahr der Weltbevölkerung vor 1920 und nach 2040 treten die Wellenbewegungen stärker hervor, so dass man hier eher von fallenden Kursen denn von Seitwärtsbewegung sprechen kann. Dazwischen kann man eher von Seitwärtsbewegungen sprechen. Und in den Aufwärtsphasen sind die Wellen eher verwischt durch die in dieser Zeit starken Anstiege, aber immer noch zu erkennen.

Im Vergleich zu der exponentiellen Entwicklung erkennt man vor 1935 eine bessere Anpassung; und in den Jahren nach 2015 wird ein geringeres mittleres Wachstum

prognostiziert. Aber auch, wenn sich das Wachstum der Weltbevölkerung seiner oberen Grenze annähert und kaum noch steigt, ist immerhin noch ein zeitliches Wachstum zu erkennen, jedoch lange nicht mehr so stürmisch wie von 1935 bis 2035.

Wenn man weiterhin exponentielles Wachstum entsprechend Kapitel 2 annehmen würde, dann wäre der DJI etwa um 2060 herum bei 100 000. Nach diesem Kapitel 4 erreicht der DJI unter Schwankungen die Werte zwischen 30 000 und 60 000. Dies kann man auch gut erkennen in der folgenden Darstellung mit der Weltbevölkerung als x-Achse. Hier werden die Mittelwertkurven weggelassen und nur die Wellenbewegungen gezeigt:



Die Extrapolation in die Zukunft ist stets mit Vorsicht zu betrachten. Ich würde mich eher an den niedrigeren Werten orientieren und nicht an den Wachstumsraten, die das exponentielle Modell zu versprechen scheint.

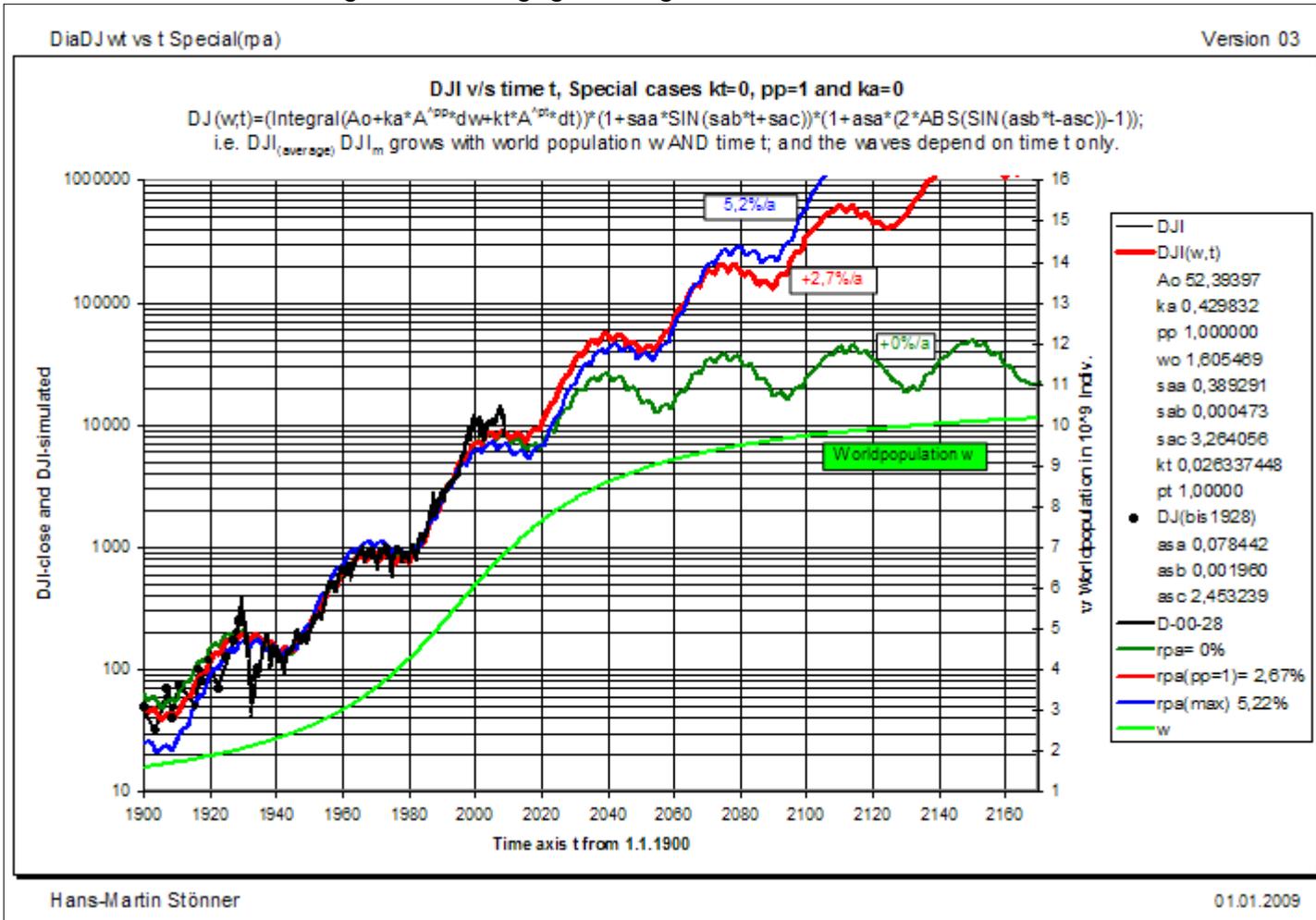
Interessant ist auch, wie der ursprüngliche „Seitwärtstrend“ von 2000 bis 2015 jetzt laut Kapitel 4 dargestellt wird: er wirkt leider eher wie ein leichter Abwärtstrend.

Und wie stark die Übertreibungen 2000 und 2007 vom normalen Verlauf abweichen. In diesen Jahren wurden die Aktienkurse mit Beginn im Jahre 1995 bzw. 2003 jeweils stark von billigen Krediten bei gelockerten Kreditbedingungen in die Höhe getrieben. Die „Normalisierungen“ finden ihren Boden jeweils kurzzeitig im Bereich der „normalen Kurve“.

Die unterschiedlichen Parameter von 1% bis 3%/a machen sich bis etwa 2015 kaum bemerkbar, jedoch erkennt man erst ab etwa 2020 größere Differenzen. Der Grund dafür

ist: Von 1970 bis 2020 verläuft das Weltbevölkerungswachstum quasi linear zur Zeitachse. Vorher und nachher wirken sich die starken Krümmungen in der Kurve aus.

Von Interesse ist noch die Betrachtung der Grenzfälle  $rpa=0\%$  und  $rpa=\max$  (d. h. keine Abhängigkeit von der Weltbevölkerung:  $kw=0$ ) sowie des Sonderfalles Exponent  $pw=1$  (d. h. der Weltbevölkerungsanteil wächst gemäß  $kw \cdot A \cdot dw$ ) mit sich daraus ergebendem  $rpa$ . Diese drei Fälle sind in folgendem Bild gegenübergestellt:



Die zugehörigen Parameter und Ergebnisse sehen wir in der nachfolgenden Tabelle:

Grenzfall (=Weltb.Fall)	Spezialfall	Grenzfall (=expon.Fall)
$kt=0$	$pt=1$ $pw=pp=1$	$kw=ka=0$
$kt$ 0	$kt$ 0,0263	$kt$ 0,0508
$pt$ 1	$pt$ 1	$pt$ 1
$A_0$ 75,675	$A_0$ 52,394	$A_0$ 26,544
$k_a$ 4,161	$k_a$ 0,4298	$k_a$ 0
$pp$ 0,7725	$pp$ 1	$pp$ 1
$w_0$ 1,6055	$w_0$ 1,6055	$w_0$ 1,6055
$s_{aa}$ 0,3991	$s_{aa}$ 0,3893	$s_{aa}$ 0,4219
$s_{ab}$ 0,0005	$s_{ab}$ 0,0005	$s_{ab}$ 0,0005
$s_{ac}$ 3,5631	$s_{ac}$ 3,2641	$s_{ac}$ 3,2785
$a_{sa}$ 0,0767	$a_{sa}$ 0,0784	$a_{sa}$ 0,0754
$a_{sb}$ 0,0020	$a_{sb}$ 0,0020	$a_{sb}$ 0,0018
$a_{sc}$ 2,5387	$a_{sc}$ 2,4532	$a_{sc}$ 3,6015
$rpa=0\%$	$rpa(pp=1)=2,67\%$	$rpa(\max)=5,22\%$
FQS= 118,57	FQS= 130,67	FQS= 209,7

Der mittlere Spezialfall liegt innerhalb des vorher geschätzten Bereiches (1-4%/a), und zwar nahe bei 3% pro Jahr und könnte ein hohes Maß an Wahrscheinlichkeit besitzen: **Zusätzlich zum Wachstums-Anteil, der auf der Weltbevölkerung beruht, käme danach noch ein zusätzlicher Anteil von etwa 2,67% pro Jahr hinzu.** Das rein zeitlich-exponentielle Wachstum würde 5,22% pro Jahr betragen (Fall 3); die Fehler-Quadrat-Summe (FQS) ist jedoch wesentlich größer: Deshalb ist Fall 3 eher wenig wahrscheinlich.

## 5. Schluss

Die Frage: „Macht es Sinn, den DJI soweit zu modellieren und gar zu extrapolieren?“ kann man positiv beantworten. Der DJI ist der einzige Wert, für den es so langfristige Daten gibt. Deshalb bietet er sich grundsätzlich für solche Auswertungen an.

Aber darüber hinaus ist der DJI ein *Indikator für die Weltwirtschaft*. Niemand weiß, ob es den Dow Jones Index in hundert Jahren noch gibt. Oder ob es ihn noch in dieser Form gibt.

Deshalb sollte man die Extrapolation nicht wörtlich nehmen, sondern die Kurve interpretiert *als relativ guten Indikator für das langfristige Wachstum der Weltwirtschaft*. Nur als solche machen sie Sinn: die *möglichst genaue Simulation der Vergangenheit* und die Extrapolation: *der suchende Blick in die Zukunft*.

## LITERATUR, LINKS

[1] Hans-Martin Stöner, Modell für Beginn, Wachstum und Grenze der Weltbevölkerung. World Population Growth Model, Kapitel 3. URL,

Link: <http://www.hansmartinstoener.de/>

## Inhaltsverzeichnis

Wachstum von Aktienkursen .....	1
am Beispiel des Dow Jones Industrial Index (DJI) .....	1
1. Einleitung .....	1
2. Der DJI mit exponentiellem Wachstum als Mittelwertkurve .....	2
2.1 Darstellung der Mittelwertkurve 1935 bis 1995 .....	2
2.2 DJI im Verhältnis zur Mittelwertkurve .....	3
2.3 Simulierung der Wellenfunktion .....	3
2.4 Verhältniskurve bezogen auf die Langwelle .....	4
2.5 Simulierung der „Torbogen“ .....	4
2.6 Endergebnis im Gesamtchart .....	5
2.7 Kritik dieser Anpassung .....	6
3. Die Mittelwertkurve abhängig vom Wachstum der Weltbevölkerung statt der Zeit .....	7
3.1 Darstellung der Mittelwertkurve .....	7
3.2 Kombination mit den Wellen .....	7
3.3 Kritik an dieser Darstellung .....	8
4. Die Lösung: Abhängigkeit des DJI von Zeit und Bevölkerungswachstum .....	10
4.1 Simulation der komplexen Abhängigkeit .....	10
4.2 Kombination mit den Wellen .....	10
4.3 Kritik dieser Darstellung .....	11
5. Schluss, Literatur, Links .....	14