

Das begrenzte hyperbolische Wachstum einer Population unter Verwendung der modifizierten Verhulst-Funktion.

Inhaltsverzeichnis auf der letzten Seite

1. Das verallgemeinerte modifizierte Verhulst-Modell

1.1. Das unbegrenzte exponentielle Wachstum

Das Modell für exponentielles Wachstum lautet:

$$dy/dt = K \cdot y^1$$

mit $K = \text{konst}$, $y = \text{wachsende Größe}$, $t = \text{Zeit}$, $dy/dt = \text{Zuwachs } dy \text{ pro Zeitabschnitt } dt$.
 dy/dt ist proportional zu y^1 : **Der Zuwachs ist der wachsenden Größe proportional.**

Dieses Modell hat nach der Integration zu $t(y) = t_0 + 1/K \cdot \text{LN}(y/y_0)$ folgende Eigenschaften:
 y wird unendlich in unendlicher Zeit t .

Die Verdopplungszeiten $t_D = t(2 \cdot y) - t(y)$ oder Halbwertzeiten $t_H = t(y) - t(y/2)$ sind konstant.
(Ein Wachstum, bei dem die Verdopplungszeit nicht konstant ist, darf nicht „exponentiell“ genannt werden.)

In halblogarithmischer Darstellung ($\text{LN}(y)$; t) erhält man eine Gerade.

1.2. Erweiterung des Modells für exponentielles Wachstum auf ein Wachstum in begrenzten Systemen

K ist in einem begrenzten System nicht mehr konstant, sondern K geht mit steigendem y gegen Null, wobei y sich asymptotisch einer Begrenzung y_{\max} nähert. Ein Ansatz, der dies leistet, lautet in der einfachsten Form

$$K = k \cdot (1 - y / y_{\max}).$$

Dies zusammen mit 1.1 ergibt die auf der logistischen Gleichung (**Verhulst, 1838**) [1] beruhende **logistische Funktion**:

$$dy/dt = k \cdot y \cdot (1 - y / y_{\max})$$

Dieses Verhulst-Modell hat nach der Integration $t(y)$ folgende Eigenschaften:
 y strebt nach y_{\max} in unendlicher Zeit. Der Nullpunkt $y = 0$ kann nicht dargestellt werden.
(Er liegt im negativen Unendlichen: $t_0 = \text{minus unendlich}$.)

K nähert sich asymptotisch der Null, je größer y wird: Nullwachstum oder Gleichgewicht.
Die Kurve $t(y)$ ist S-förmig und hat einen Wendepunkt bei $y_w = 1/2 \cdot y_{\max}$ und $t_w = t(y_w)$.
Am Wendepunkt $t(y_w)$ ist die Steigung dy/dt am größten.

Die Funktion dy/dt , in einem Diagramm über y (von $y = 0$ bis y_{\max}) aufgetragen, stellt eine auf dem Kopf stehende Parabel dar, deren Maximum dem Wendepunkt y_w der integrierten Funktion $t(y)$ entspricht.

1.3. Das unbegrenzte hyperbolische Wachstum

Ein Modell für hyperbolisches Wachstum lautet:

$$dy/dt = K \cdot y^p$$

mit $K = \text{konst}$ und $p > 1$.

Dieses Modell hat folgende Eigenschaften:

y strebt nach Unendlich in endlicher Zeit.

Die Kurve weist an dieser Stelle eine Singularität auf.

Die Verdopplungszeiten sind nicht konstant. Der Begriff der Verdopplungszeit (bzw. der Halbwertszeit) sollte daher streng genommen dem exponentiellen Wachstum vorbehalten sein. (Jedoch ist es zweckmäßig, die Verdopplungszeiten zu ermitteln, um bei Nichtkonstanz der Verdopplungszeiten hyperbolisches Wachstum anzunehmen.)

In halblogarithmischer Darstellung ergibt sich keine Gerade.

1.4. Das begrenzte hyperbolische Wachstumsmodell

Dieses Modell erhält man (analog dem Verhulst-Modell aus 1.2.) mit dem Ansatz:

$$K = k \cdot (1 - y / y_{\max})^q$$

Das ergibt, kombiniert mit 1.3., ein modifiziertes Verhulst-Modell:

$$dy/dt = k \cdot y^{p \cdot q} \cdot (1 - y / y_{\max})^q$$

Dieses Modell hat nach der Integration folgende Eigenschaften:

Setzt man $p = 1$ und $q = 1$, ergibt sich das originale Verhulst-Modell: die logistische Funktion.

Die Eigenschaften sind auch ähnlich dem Verhulst-Modell: die Kurve $t(y)$ ist S-förmig und hat einen Wendepunkt: $y_w = y_{\max} / (1 + q/p)$; wenn $q = p$ ist, dann ist $y_w = y_{\max} / 2$.

Maximales Wachstum dy/dt am Wendepunkt.

Nullwachstum: K strebt gegen 0 bei Annäherung von y an y_{\max} .

y nähert sich y_{\max} in unendlicher Zeit.

Der Hauptunterschied zum Verhulst-Modell liegt im Anstieg des Wachstums in der hyperbolischen Phase unterhalb des Wendepunktes. Bis zum Wendepunkt verkleinern sich die „Verdopplungszeiten“. Danach nehmen die Verdopplungszeiten wieder zu.

1.5. Das Wachstum unter evolutionären Bedingungen

Wenn eine Spezies y sich durch Mutation neu bildet, ist vor dieser Mutation $y = 0$. Die Evolution wirkt auf das Genom der Vorgänger ein. Das ist zunächst die einzige Kraft, die das Wachstum in eine neue Richtung treibt. Sobald die Spezies y entstanden ist, ist dieser Einfluss noch vorhanden, die Evolution wirkt weiterhin, aber nun, in abnehmender Weise, auf die neue Spezies y ein. Dieser anfangs einzige, später geringer werdende Einfluß y_a

wird mathematisch dargestellt, indem das Wachstum dy/dt nun proportional zu (y_a+y) ist statt proportional zu (y) :

Bei exponentiellem Wachstum:

$$dy/dt = K^*(y_a + y)^1.$$

Bei hyperbolischem Wachstum ist der Exponent p größer als 1:

$$dy/dt = K^*(y_a + y)^p.$$

(Alternative Ansätze für hyperbolisches Wachstum unter evolutionären oder anderen Startbedingungen sind auch in Gebrauch, wie zum Beispiel $dy/dt = a+b*y^p$. Diese sehr interessanten Ansätze werden in folgendem aber nicht weiter behandelt, um die Ähnlichkeit zum Verhulst-Modell nicht noch weiter zu strapazieren.)

1.6. Das begrenzte hyperbolische Wachstum unter evolutionären Bedingungen

Die Begrenzung wird wieder wie in 1.4. durch den mit y abnehmenden Parameter K dargestellt:

$$K = k^*(1-y/y_{\max})^q$$

Damit wird aus 1.5. die verallgemeinerte modifizierte Verhulst-Funktion MVF:

$$dy/dt = k^*(y_a+y)^{p^*}(1-y/y_{\max})^q$$

Diese Funktion hat nach der Integration folgende Eigenschaften: Der Startpunkt $t_0 = t(y=0)$ ist in endlicher Zeit darstellbar. Der Wendepunkt der S-Kurve $t(y)$ ist

$$y_w = (y_{\max} - y_a * q/p)/(1+q/p);$$

und wenn $q = p$ ist, dann folgt daraus $y_w = (y_{\max} - y_a)/2$.

Die sonstigen Eigenschaften sind ähnlich wie in 1.4. beschrieben. Mit diesen Größen erhält man z. B. das folgende Integral $t(y)$, wobei $t_w = t(y_w)$, $a = y_a$, $y_m = y_{\max}$, $rk = 1/k$:

$$t(y) = t_w + \int_{y_w}^y \frac{rk}{(a+y)^p \cdot \left(1 - \frac{y}{y_m}\right)^q} dy$$

Setzt man $y_a = 0$, $p = 1$ und $q = 1$, erhält man den auf dem exponentiellen Wachstum aufbauenden originalen Ansatz nach Verhulst aus 1.2., die logistische Funktion:

$$dy/dt = k^*(0+y)^1*(1-y/y_{\max})^1$$

bzw.

$$dy/dt = k^*(y)^1*(1-y/y_{\max}).$$

So wird klar, dass das verallgemeinerte modifizierte Modell als Grenzfall die logistische Funktion enthält. Mit ihr kann man zum Beispiel das Wachstum einer Population, die kein ausgeprägtes Bewußtsein hat, in einem begrenzten System oder Lebensraum gut darstellen.

Bei bewusst miteinander oder gegeneinander agierenden Lebewesen, wie den Menschen, gelten andere Gesetze, so dass man ein Modell, bei dem die Exponenten p und q gleich 1

sind, nicht anwenden kann. (Tut man es doch, kommt man zur sogenannten Chaostheorie. Dabei wird ausgeblendet, dass man es mit einem auf exponentiellem Wachstum basierenden Ansatz zu tun hat.)

1.7. Lineares Wachstum

Setzt man in dem *verallgemeinerten modifizierten Verhulst-Modell* $q = 0$, ergeben sich alle Formen des unbegrenzten Wachstums.

Setzt man neben $q = 0$ auch noch $p = 0$, ergibt sich als Grenzfall das **lineare Wachstum**:

$k \cdot dt = dy$ oder integriert:

$k \cdot (t - t_0) = y - y_0$, und mit $y_0 = 0$:

$t = t_0 + (1/k) \cdot y$.

2. Anwendung der verallgemeinerten modifizierten Verhulst-Funktion auf vorgegebene Wachstumsreihen.

2.1. Allgemeine Vorbemerkungen

Hat man eine Messreihe für das Wachstum einer bestimmten Spezies in einem begrenzenden System, kann man stets das verallgemeinerte Verhulst-Modell ansetzen, weil es den Grenzfall des einfachen Verhulst-Modells und die anderen Grenzfälle enthält und man die Parameter k , y_a , y_{\max} , p und q so bestimmen kann, dass die vorliegende Messreihe möglichst genau repräsentiert wird.

- Setzt man zum Beispiel $y_{\max} = \infty$ oder $q = 0$, dann erhält man alle Modelle für unbegrenztes Wachstum.
- Setzt man $y_a = 0$, $y_{\max} = \text{endlich}$, und p sowie $q = 1$, ergibt sich das einfache, auf anfänglich exponentiellem Wachstum beruhende Verhulst-Modell: Die logistische Funktion.

Bei der Parameterbestimmung wendet man zweckmäßigerweise die nichtlineare Fehlerausgleichsrechnung an, bei der als Zielfunktion die

Summe der Fehlerquadrate $(t_{\text{berechnet}} - t_{\text{gemessen}})^2$ ein Minimum wird

und die Messpunkte mit einer minimalen Streuung um die berechnete Kurve herum dargestellt werden können.

Diese Methode erfordert sehr gute Startwerte für die Parameter. Wenn man p und q vorher abschätzen kann, z. B. mit 1, 2 oder 3, dann kann man die Gleichung, beispielsweise für $p = 2$: $k \cdot dt = [(y_a + y) \cdot (1 - y / y_{\max})]^{-2} \cdot dy$, integrieren und braucht nur noch die drei Parameter k , y_a , y_{\max} sowie eine Integrationskonstante zu bestimmen. Sind die Exponenten p oder q nicht abzuschätzen, kann man zunächst mit **numerischer Integration** beginnen, wobei nun fünf Parameter und eine Integrationskonstante zu bestimmen sind. Hilfreich ist dabei die grafische Gegenüberstellung von berechneten und

gegebenen Werten, so dass man die Parameter einzeln von Hand gut abschätzen kann, da jede Änderung sofort im ganzen Kurvenverlauf zu sehen ist. Das führt rasch zu guten Startwerten. Man kann die Anzahl der Parameter auch reduzieren, wenn man analog zu Verhulst (wo beide Exponenten q und p gleich 1 sind) beide Exponenten p und q ebenfalls gleichsetzt: $q = p$, dann sind nur noch vier Parameter k , y_a , y_{\max} , p und eine Integrationskonstante zu bestimmen.

Hat man die Größenordnung von p auf diesem Wege berechnet, kann man evtl. einen passenden gerundeten Wert für p wählen, der eine Integration ermöglicht. Danach sind nur noch k , y_a , y_{\max} sowie die Integrationskonstante passend zum gewählten Exponenten p neu zu ermitteln.

2.2. Ein Anwendungsbeispiel für begrenztes hyperbolisches Wachstum unter evolutionären Bedingungen

Gegeben seien die folgenden Werte für ein System mit begrenztem Lebensraum y_{\max} , wobei diese Grenze unbekannt ist und sich aus dem Kurvenverlauf abschätzen lässt:

<u>Population y</u>	<u>Zeit t</u>
0	-118000
1	1805
2	1927
3	1960
4	1974
5	1987
6	1999
7	2011

Welches Modell stellt diese Messreihe am besten dar?

Das verallgemeinerte Verhulst-Modell enthält alle besprochenen Varianten. Ein Versuch mit $q = p$ und $p = 1, 2, 3$ und 4 führt zu vier Ergebnissen, die miteinander zu vergleichen sind. Das Modell mit den geringsten Abweichungen wird gewählt.

Für die verschiedenen Exponenten p ergeben sich folgende Fehlersummen von $(t-t_{\text{mes}})^2$:

<u>Exponent p</u>	<u>Summe der Fehlerquadrate (gerundet)</u>
1	2164
2	629
3	8
4	81

Der geringste Fehler tritt offensichtlich bei dem Exponenten $p = 3$ auf. (Da auch die Messwerte selbst bereits fehlerbehaftet sind, wird man im Allgemeinen nie auf eine Fehlersumme von Null kommen.)

Daher ergibt sich für diese Messreihe das am wenigsten schlechte Modell zu

$$dy/dt = k \cdot [(y_a + y) \cdot (1 - y / y_{\max})]^3$$

mit einem Wendepunkt bei $y_w = (y_{\max} - y_a \cdot q/p) / (1 + q/p) = 1/2 \cdot (y_{\max} - y_a)$

Das verallgemeinerte Verhulst-Modell mit $p = 1$ weist den größten Fehler auf. Die Datenreihe zeichnet sich vor dem Wendepunkt durch kürzer werdende

Verdopplungszeiten aus. Daher ist ein anfänglich eher exponentieller Ansatz wie der von Verhulst für diesen Verlauf nicht geeignet.

In der folgenden Tabelle werden die berechneten den vorgegebenen Werten gegenübergestellt.

Ergebnisse:

<u>Population y</u>	<u>Zeit t gegeben</u>	<u>Zeit t numerisch berechnet (p = q = 3)</u>
0	-118000	-118000
1	1805	1805
2	1927	1926
3	1960	1959
4	1974	1976
5	1987	1988
6	1999	1999
7	2011	2010

Die Parameter für dieses Beispiel lauten:

k	0,0042059
y_a	0,0321
y_{\max}	11,19
p	3
q	3

Die anfänglich unbekannte Grenze oder Tragfähigkeit des Lebensraums ergibt sich aus der Parameterbestimmung der am besten angepassten Kurve mit $y_{\max} = 11,19$.

Der Evolutionsdruck y_a hat gegen Ende der Entwicklung nur noch einen Einfluß von

$$y_a / y_{\max} = 0,3\%.$$

Die Spezies hat sich etabliert und verteidigt sich gegen Änderungen durch die große Anzahl von Individuen. Wie lange dieser Zustand anhalten wird, ist nicht vorhersagbar.

Der Wendepunkt y_w bei dieser Lösung liegt wegen $q/p = 1$ bei

$$y = \frac{1}{2} \cdot (y_{\max} - y_a) = 5,58$$

zum Zeitpunkt

$$t(y_w) = 1994 \text{ (gerundet).}$$

2.3. Ein weiteres Beispiel für begrenztes hyperbolisches Wachstum unter evolutionären Bedingungen auf Basis einer anders ermittelten Voraussage

Wenn man geglättete Messwerte zugrunde legt, die mit anderen (meist nicht veröffentlichten) Funktionen, zum Beispiel einfachen Polynomen, ermittelt wurden, sowie darauf aufbauende Voraussagewerte zusätzlich berücksichtigt, dann läßt sich manchmal mit dem verallgemeinerten Verhulst-Modell eine recht gute Übereinstimmung mit diesen künstlichen Werten innerhalb des gegebenen Wertebereichs erzielen. Die Interpolation gelingt mit beiden Funktionen sehr gut, aber während es sich bei der Glättungsfunktion um reine Interpolation plus gegebenenfalls noch einigen zusätzlichen extrapolierten Werten handelt, läßt das verallgemeinerte Verhulst-Modell zwar eine an sich sinnvoll erscheinende Extrapolation zu, die jedoch mit äußerster Vorsicht zu betrachten ist. Die gute Übereinstimmung mit den geglätteten Werten läßt zunächst vermuten, dies sei nun die gesuchte Lösung. Da aber in den Glättungswerten bereits eine Gesetzmäßigkeit vorgegeben ist (und evtl. ungesicherte Zukunftswerte enthalten sind), kann es sein, dass die Ergebnisse irreführend sind, da sie nicht mehr auf realen Messwerten beruhen. Octave Levenspiel [2] warnt in „Chemical Reaction Engineering“, © 1999 John Wiley and Sons, Third Edition, Seite 66, dringend davor, mit dem Computer zum Beispiel eine handelsübliche Polynom-Anpassung der Messwerte durchzuführen, um anschließend damit ein passendes sinnvolles Modell zu ermitteln. Ähnliches kann auch beim begrenzten Wachstum irreführende Modelle und Parameter ergeben. Dazu ein Beispiel. Gegeben seien folgende Wertepaare.

<u>Population y</u>	<u>Zeit t</u>
2,555	1950,0
3,000	1958,0
3,115	1960,0
3,750	1970,0
4,025	1974,0
4,500	1980,5
5,010	1987,0
5,250	1990,0
6,000	1999,0
6,080	2000,0
6,705	2007,5
7,070	2012,0
7,675	2020,0
8,030	2025,0
8,365	2030,0
8,975	2040,0
9,030	2041,0
9,515	2050,0

Wendet man darauf die unter 2.1 beschriebene Methode an, wobei p und q zunächst nicht bekannt sind und deshalb eine numerische Integration erforderlich ist, dann erhält man bei

guter Anpassung mit sehr geringen Fehlern die folgenden vorläufigen Parameter für die verallgemeinerte modifizierte Verhulst-Funktion (MVF):

rk = 1/k = 79,80
 a= 0,0039308
 ym= 17,37
 p= 2,01417
 q= 4,01979

 yw=(ym-q/p*a)/(1+q/p)= 5,7900
 tw(yw)= 1996,39

Da p und q leicht durch geglättete Zahlen (2 und 4) ersetzt werden können, ergibt eine erneute Anpassung der restlichen drei Parameter folgende Werte:

rk=1/k= 79,9458
 a= 0,000475
 ym= 17,49523
 p= 2,00
 q= 4,00

 yw=(ym-q/p*a)/(1+q/p)= 5,8314
 tw(yw)= 1996,97

Ein Polynom 3. Grades berechnet die gegebenen Werte auffallend genau:

$$t = 0,2008 \cdot y^3 - 3,5877 \cdot y^2 + 33,292 \cdot y + 1885$$

Eine Gegenüberstellung der gegebenen Werte mit den Polynom-Werten und den Wachstumsmodell-Werten zeigt eine sehr gute Übereinstimmung innerhalb des Messbereiches:

Population Y	Zeit t(gegeben)	Zeit t(Polynom)	Zeit t(MVF)
2,555	1950,0	1950,0	1948,5
3,000	1958,0	1958,0	1957,9
3,115	1960,0	1960,0	1959,9
3,750	1970,0	1970,0	1970,3
4,025	1974,0	1974,0	1974,2
4,500	1980,5	1980,5	1980,7
5,010	1987,0	1987,0	1987,1
5,250	1990,0	1990,0	1990,0
6,000	1999,0	1999,0	1999,0
6,080	2000,0	1999,9	1999,9
6,705	2007,5	2007,5	2007,4
7,070	2012,0	2012,0	2012,1
7,675	2020,0	2020,0	2019,9
8,030	2025,0	2025,0	2025,0
8,365	2030,0	2030,0	2029,9
8,975	2040,0	2040,0	2040,0
9,030	2041,0	2040,9	2041,0
9,515	2050,0	2049,9	2050,2

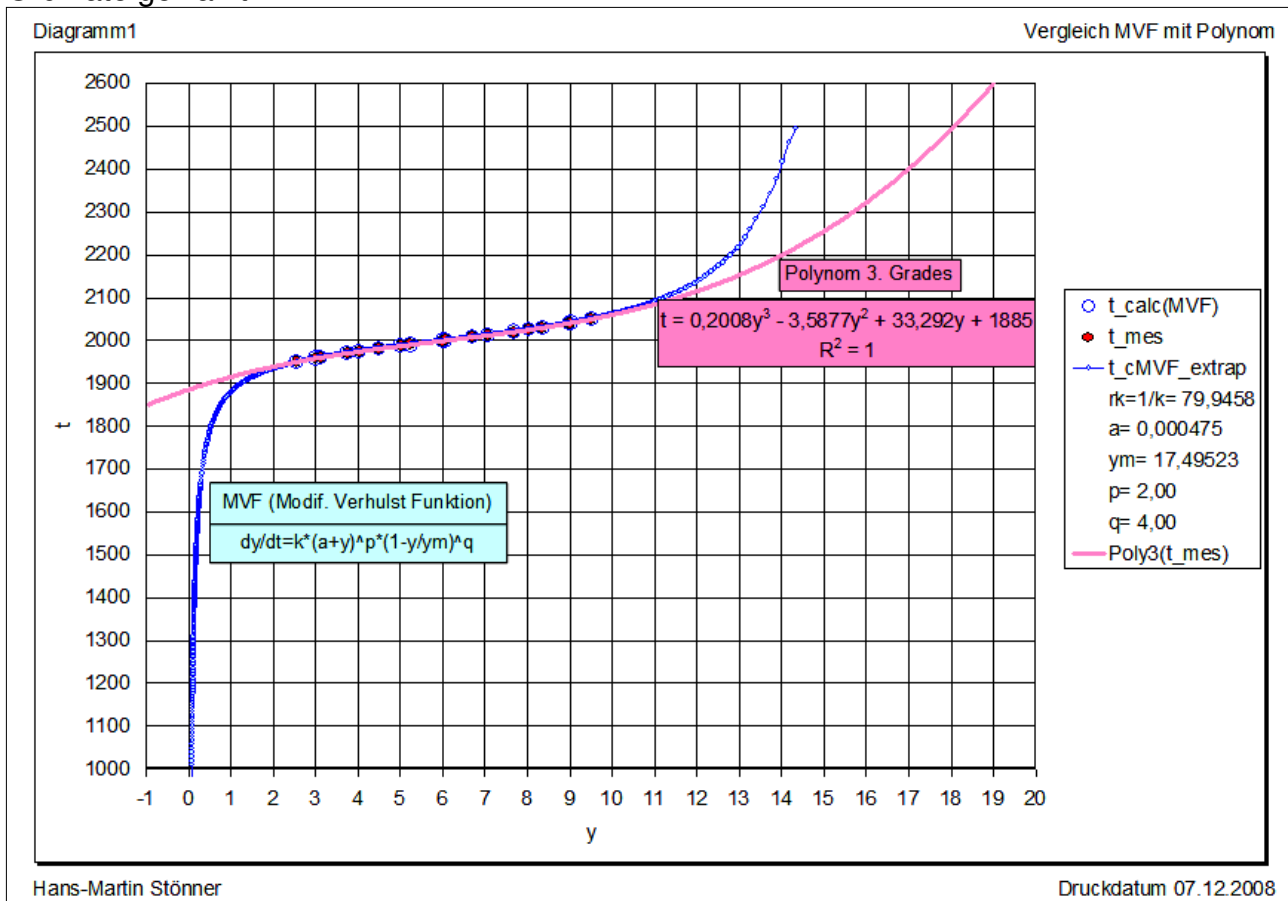
Sobald man aber den gegebenen Bereich verlässt und die Kurven in die Vergangenheit oder die Zukunft verlängert (extrapoliert), dann zeigen sich erhebliche Unterschiede zwischen dem einfachen Polynom und dem wohlfundierten Wachstumsmodell MVF:

Das Polynom ergibt Null ($y = 0$) zum Zeitpunkt $t = 1885$ und geht darunter in einen *negativen Bereich für y*, was für das Wachstum einer Population *y völlig unsinnig* ist.

Im hohen Bereich führt das Polynom ins Unendliche: nicht nur die Zeit sondern auch die Population, was *bei Wachstum im begrenzten System ebenfalls unsinnig* ist.

Alle diese Nachteile hat das Wachstumsmodell zwar nicht. Es ist dem Polynom qualitativ überlegen. Aber die gute Übereinstimmung täuscht. Das liegt daran, dass die offenbar geglätteten und dazu noch teilweise extrapolierten Daten aus dem sehr kurzen Bereich (1950 bis 2050) dem Wachstumsmodell nun bei der Parameteranpassung *ihr eigenes Gesetz aufgezwungen* haben. Die obigen Zahlen sind in folgendem Diagramm gegenübergestellt, außerdem sind die Extrapolationen des Polynoms und der MV-Funktion im Bereich von 1000 bis 2600 dargestellt.

Da die Funktionen beide in der Form $t(y)$ vorliegen, wurde y als Abszisse und t als Ordinate gewählt.



Die Extrapolation (MVF) in die Vergangenheit stimmt mit historischen Werten überhaupt nicht überein. Was die Zukunft angeht, haben wir keine Vergleichswerte, außer anderen Hochrechnungen. Da fallen besonders die unterschiedlichen Exponenten $p = 2$ und $q = 4$ auf: Das führt zu einem asymmetrischen Kurvenverlauf: die Zukunftskurve ist schwächer gekrümmt als die Vergangenheitskurve. Zudem ist die Grenze y_m wesentlich höher als bei Anpassungen, die auch Vergangenheitswerte mit berücksichtigen.

Diese Erfahrung führt uns zu der Erkenntnis:

- 1. nur gesicherte Vergangenheitswerte als Basis nutzen.
 - 2. keine Glättung dieser Werte mit rein mathematischen Methoden vornehmen.
 - 3. keine extrapolierten Zukunftswerte benutzen, auch wenn sie noch so gut zu modellieren sind.
 - 4. möglichst breite Datenbasis wählen: alle einigermaßen gesicherten Werte nutzen; weitab liegende Punkte wirken Modell-stützend.
-

INHALTSVERZEICHNIS

Das begrenzte hyperbolische Wachstum einer Population.....	1
unter Verwendung der modifizierten Verhulst-Funktion.	1
1. Das verallgemeinerte modifizierte Verhulst-Modell	1
1.1. Das unbegrenzte exponentielle Wachstum.....	1
1.2. Erweiterung des Modells für exponentielles Wachstum auf ein Wachstum in begrenzten Systemen.....	1
1.3. Das unbegrenzte hyperbolische Wachstum.....	2
1.4. Das begrenzte hyperbolische Wachstumsmodell	2
1.5. Das Wachstum unter evolutionären Bedingungen	2
1.6. Das begrenzte hyperbolische Wachstum unter evolutionären Bedingungen	3
1.7. Lineares Wachstum	4
2. Anwendung der verallgemeinerten modifizierten Verhulst-Funktion auf vorgegebene Wachstumsreihen.....	4
2.1. Allgemeine Vorbemerkungen.....	4
2.2. Ein Anwendungsbeispiel für begrenztes hyperbolisches Wachstum unter evolutionären Bedingungen	5
2.3. Ein weiteres Beispiel für begrenztes hyperbolisches Wachstum unter evolutionären Bedingungen auf Basis einer anders ermittelten Voraussage.....	7

LITERATUR

- [1] Verhulst, Pierre-Francois (1838). Siehe Wikipedia, Stichworte: Logistische Funktion. Logistische Gleichung. Chaostheorie. [Pierre-François Verhulst.](#)
- [2] Levenspiel, Octave. „Chemical Reaction Engineering“, © 1999 John Wiley and Sons, Third Edition, Page 66.
<http://www.amazon.de/Chemical-Reaction-Engineering/dp/047125424X>